



1. Laskimen käyttö

1.1. Laske taskulaskimella seuraavan lausekkeen arvo ja anna tulos kolmen numeron tarkkuudella:

$$\frac{\sqrt{4^2 + 7^2}}{\tan 60,0^\circ + 1}$$

Ratkaisu:
$$\frac{\sqrt{4^2 + 7^2}}{\tan 60,0^\circ + 1} = 2,950\dots \approx 2,95$$

Huom1: Laskimissa on yleensä kolme eri kulmayksikköjärjestelmää: asteet, radiaanit ja uusiasteet. Kun lasket yo.tehtävän, niin tee se esimerkiksi seuraavasti:

$$\sqrt{4^2 + 7^2} : (\tan 60.0^\circ + 1)$$

Siis käytä sulkeita jakomerkin jälkeen. Toinen mahdollisuus on käyttää laskimen muistipaikkoja.

Huom2: Laskimien oppaista löytyy ohjeita. Jos ohjekirjaa ei ole, niin Internetistä löytyy ohjeita eri laskimille. Esimerkiksi TI-sarjan laskimille löytyy ohjeita osoitteesta

<http://www.laskentavaliine.fi/>

1.2. Laske laskimella
$$\frac{4,671 - 3,32}{1,48 - 1,825}$$

Ratkaisu:
$$\frac{4,671 - 3,32}{1,48 - 1,825} = -3,915\dots \approx -3,92$$

Huom: Kirjoita laskimeen seuraavasti: $(4.671 - 3.32) : (1.48 - 1.825)$. Kun laskimella lasketaan, niin välituloksia ei saa pyöristää. Pitkissä laskuissa kannattaa käyttää laskimen muistipaikkoja. Merkintä ... tarkoittaa pyöristämättömiä arvoja. Jos lukua $-3,915\dots$ tarvittaisiin myöhemmin toiseen tehtävään, niin se kannattaa sijoittaa laskimen muistipaikkaan. Edellä tulos on annettu kolmen numeron tarkkuudella. Voidaan myös sanoa, että tulos on ilmaistu kahden desimaalin tarkkuudella. Jos likiarvot tehtävässä esiintyy sekä yhteen-, vähennys-, kerto- ja jakolaskuja, niin yleensä vastaus annetaan heikoimman lähtöarvon numeroiden mukaan. Edellä luku 1,48 on ilmaistu kolmen numeron tarkkuudella.



2. Lausekkeiden sieventäminen

2.1. Sievennä lausekkeet:

a) $-x - \{3y - [x - 3(x - y)]\}$

b) $\frac{-4a^3b^2c}{6ab^2c^3}$

Ratkaisu:

a) $-x - \{3y - [x - 3(x - y)]\} = -x - \{3y - [x - 3x + 3y]\} = -x - \{3y - [-2x + 3y]\}$
 $= -x - \{3y + 2x - 3y\} = -x - 2x = -3x$

b) $\frac{-4a^3b^2c}{6ab^2c^3} = \frac{-2a^2}{3c^2}$

Huom1: Laskujärjestys: Suorittaessa yhteen-, vähennys-, kerto- ja jakolaskuja edetään vasemmalta oikealle. Ensiksi suoritetaan kerto- ja jakolaskut ja sitten yhteen- ja vähennyslaskut ellei sulkeet toisin määrää. Erityisesti on huomattava, että sulkeita poistettaessa etumerkit vaihtuu:

$$-(a - b) = -a + b = b - a$$

Huom2: Lauseke on aina yhtäsuuri kuin jokin toinen lauseke. Sen sijaan esimerkiksi yhtälöitä ratkaistaessa pyritään yhtälö muuttamaan loogisesti yhtäpitävään muotoon. **Lauseketta ei saa kertoa millään luvulla!**

$$100\text{€} \neq 2 \cdot 100\text{€}$$

Huom3: Kalle Väisälän vanhassa keskikouluun tarkoitettussa oppikirjassa on paljon asiaa mm. lausekkeiden sieventämisestä, yhtälöistä jne. Nämä asiat läpikäydään nykyään peruskoulussa, ammatti-instituuteissa ja lukiossa.

<http://solmu.math.helsinki.fi/2007/vaisala/>

On huomattava, että em. oppikirjassa puhutaan markoista ja mm. jakokulma on vanha.



2.2. Sievennä lausekkeet

$$\text{a) } \frac{a^2 - 4}{a - 2} \qquad \text{b) } -a^{2^3} - (-a^2)^3 + (-a)^{2^3}$$

Ratkaisu: a)
$$\frac{a^2 - 4}{a - 2} = \frac{(a + 2)(a - 2)}{a - 2} = a + 2$$

Huom1: Kaavoja:

$$a^2 - b^2 = (a + b)(a - b) \qquad (a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$$

Huom2: Vain tulomuodoista voidaan supistaa. Esimerkiksi lausekkeesta $\frac{a+b}{a}$ ei voida supistaa mitään. Vertaa esimerkiksi $\frac{2+5}{2} \neq 1+5=6$

b)
$$-a^{2^3} - (-a^2)^3 + (-a)^{2^3} = -a^8 - (-a^6) + (-a)^8 = -a^8 + a^6 + a^8 = a^6$$

Huom: Potenssikaavoja on tarkalleen 5:

$$\begin{array}{lll} 1) & (ab)^n = a^n b^n & 2) \quad \left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n} & 3) \quad \frac{a^m}{a^n} = a^{m-n} \\ 4) & a^m a^n = a^{m+n} & 5) \quad (a^m)^n = a^{mn} \end{array}$$

Näissä n on mikä tahansa kokonaisluku eli $n \in \mathbb{Z} = \{0, \pm 1, \pm 2, \dots\}$. Negatiivinen potenssi määritellään seuraavasti $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$, $a \neq 0$.

Potenssia 0^0 ei voi määritellä. Kaavat 1) – 5) pätevät myös kaikille reaaliluvuille, mikäli kaavojen molemmat puolet ovat määritellyt ja lisäksi kantaluvut ovat positiivisia. Jos kaavoissa eksponentit ovat murtolukuja, niin saadaan juurille vastaavat kaavat. Neliöjuuri \sqrt{a} määritellään potenssina $a^{\frac{1}{2}}$, mikäli $a > 0$.



Murtopotenssi määritellään vain, jos kantaluku on positiivinen. Sen sijaan juuret määritellään seuraavasti:

$$\sqrt[n]{a} = x \Leftrightarrow \begin{cases} x^n = a, x \geq 0, \text{ jos } n \text{ on parillinen} \\ x^n = a, \text{ jos } n \text{ on pariton} \end{cases}$$

Juuri voidaan muuttaa murtopotenssiksi: $\sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{n}}$

Esimerkiksi kaava 1 saa muodon $\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a} \sqrt[n]{b}$

2.3. Sievennä lauseke $\frac{\sqrt{xy^4}}{\sqrt{x^3y^2}}$ ($x, y > 0$)

Ratkaisu:
$$\frac{\sqrt{xy^4}}{\sqrt{x^3y^2}} = \frac{\sqrt{x(y^2)^2}}{\sqrt{x^2y^2x}} \frac{y^2\sqrt{x}}{xy\sqrt{x}} = \frac{y}{x}$$

Huom: Neliöjuuren sisältä voidaan poistaa termejä, mikäli saadaan tulontekijäksi potenssi 2.

Esimerkiksi $\sqrt{8} = \sqrt{2^2 \cdot 2} = 2\sqrt{2}$. Termejä ei voi poistaa miten sattuu. Mm. aika yleinen virhe on seuraava:

$$\sqrt{a^2 + b^2} = a + b$$

Jonkin kaavan voi osoittaa vääräksi yhdellä vastaesimerkillä:

$$\sqrt{2^2 + 1^2} \neq 2 + 1 = 3, \text{ sillä vasenpuoli on } \sqrt{2^2 + 1^2} = \sqrt{5} \approx 2,24 \text{ ja}$$

oikeapuoli on 3.



3. Yhtälöt ja yhtälöryhmät

3.1. Ratkaise yhtälö $5(x - 2) - 5 = x + 3$.

Ratkaisu: $5(x - 2) - 5 = x + 3 \Leftrightarrow 5x - 10 - 5 = x + 3 \Leftrightarrow 5x - 15 = x + 3 \Leftrightarrow$

$$5x - x = 3 + 15 \Leftrightarrow 4x = 18 \Leftrightarrow x = 18/4 = 4\frac{1}{2}$$

Huom: Merkki \Leftrightarrow tarkoittaa, että esim. edellinen yhtälö on loogisesti yhtäpitävä jälkimmäisen yhtälön kanssa. Luetaan silloin ja vain silloin kun tai jos ja vain jos.

3.2. Ratkaise yhtälöt a) $x^2 = 10x$ b) $\frac{1}{\sqrt{t+1}} = \sqrt{2}$ c) $10^{-x} = 1000$

Ratkaisu: a) $x^2 = 10x \Leftrightarrow x^2 - 10x = 0 \Leftrightarrow x(x - 10) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee (x - 10) = 0$

$$\Leftrightarrow x = 0 \vee x = 10$$

b) $\frac{1}{\sqrt{t+1}} = \sqrt{2} \quad | \quad ()^2 \Leftrightarrow \frac{1}{t+1} = 2 \Leftrightarrow t+1 = \frac{1}{2} \Leftrightarrow t = \frac{1}{2} - 1 = -\frac{1}{2}$

c) $10^{-x} = 1000 \Leftrightarrow 10^{-x} = 10^3 \Leftrightarrow -x = 3 \Leftrightarrow x = -3$

Huom1: Tulo $ab = 0 \Leftrightarrow a = 0 \Leftrightarrow b = 0$. Merkki \vee on tai, mikä matematiikassa on ns. molemmat vaihtoehdot hyväksyvä tai. Sana ja matematiikassa usein korvataan merkillä \wedge .

Huom2: a)- kohdan yhtälöä ei kannata ratkaista toisen asteen yhtälön ratkaisukaavalla:

$$ax^2 + bx + c = 0 \Leftrightarrow x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$



Tässä tietenkin oletetaan, että $a \neq 0$. On kuitenkin huomattava, että jos esimerkiksi

$$x(x+2) = 3,$$

niin ei pidä paikkaansa, että $x = 3$ tai $x + 2 = 3$. Tällainen yhtälö on ratkaistava em. kaavalla:

$$x(x+2) = 3 \Leftrightarrow x^2 + 2x - 3 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{-2 \pm \sqrt{4 - 4 \cdot 1 \cdot (-3)}}{2 \cdot 1} = \frac{-2 \pm \sqrt{16}}{2} = \frac{-2 \pm 4}{2}$$

eli yhtälöllä on 2 ratkaisua $x = 1$ tai $x = -3$. **On muistettava myös, että esimerkiksi**

$$\sqrt{4} = 2, \text{ mutta yhtälöllä } x^2 = 4 \text{ on kaksi ratkaisua } x = \pm\sqrt{4} = \pm 2.$$

Huom3: Yhtälön korottaminen toiseen potenssiin on luvallista(eli loogisesti yhtäpitävää) vain ja ainoastaan silloin, kun molemmat puolet ovat ei negatiivisia.

Huom4: Jos yhtälö on ”verrantomuotoinen”, niin sitä on helppo käsitellä. Oletetaan, että $a, b, c, d > 0$.

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Leftrightarrow ad = bc$$

Verrannolle voidaan tehdä monenlaisia operaatioita. Edellä on niistä kenties tärkein eli ristiinkertominen.

3.3. Ratkaise seuraavista kaavoista sulkeissa mainittu kirjain. Oletetaan, että kaikki kirjaimet ovat positiivisia.

$$\text{a) } R = \frac{U}{I} \quad (I = ?) \qquad \text{b) } A = \frac{a+b}{2}h \quad (h = ?) \qquad \text{c) } T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}} \quad (g = ?)$$

$$\text{d) } V = \frac{h}{6}(A + 4Q + B) \quad (A = ?) \qquad \text{e) } s = \frac{1}{2}gt^2 \quad (t = ?) \qquad \text{f) } \frac{E}{e} = \frac{R+r}{r} \quad (r = ?).$$

Kohdassa f oletetaan, että $E \neq e$

$$\text{Ratkaisu: a) } R = \frac{U}{I} \Leftrightarrow RI = U \Leftrightarrow I = \frac{U}{R}$$

$$\text{b) } A = \frac{a+b}{2}h \Leftrightarrow 2A = (a+b)h \Leftrightarrow (a+b)h = 2A \Leftrightarrow h = \frac{2A}{a+b}$$



$$c) T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}} \Leftrightarrow T^2 = 4\pi^2 \cdot \frac{L}{g} \Leftrightarrow gT^2 = 4\pi^2 L \Leftrightarrow g = \frac{4\pi^2 L}{T^2}$$

$$d) V = \frac{h}{6}(A + 4Q + B) \Leftrightarrow 6V = h(A + 4Q + B) \Leftrightarrow \frac{6V}{h} \Leftrightarrow A + 4Q + B \Leftrightarrow A = \frac{6V}{h} - 4Q - B$$

$$e) s = \frac{1}{2}gt^2 \Leftrightarrow 2s = gt^2 \Leftrightarrow t^2 = \frac{2s}{g} \Leftrightarrow t = \pm\sqrt{\frac{2s}{g}}, t > 0 \Leftrightarrow t = \sqrt{\frac{2s}{g}}$$

$$f) \frac{E}{e} = \frac{R+r}{r} \Leftrightarrow Er = e(R+r) = eR + er \Leftrightarrow Er - er = Re \Leftrightarrow (E-e)r = Re \Leftrightarrow r = \frac{Re}{E-e}$$

3.4. Ratkaise yhtälöpari

$$\begin{cases} 5x - 2y = 8 \\ x + 4y = -4 \end{cases}$$

Ratkaisu:

$$+ \begin{cases} 5x - 2y = 8 \cdot 2 \\ x + 4y = -4 \end{cases}$$

$$11x = 12 \Rightarrow x = \frac{12}{11}$$

$$+ \begin{cases} 5x - 2y = 8 \\ x + 4y = -4 \cdot (-5) \end{cases}$$

$$-22y = 28 \Rightarrow y = -\frac{28}{22} = -\frac{14}{11}$$

Vastaus:

$$\begin{cases} x = \frac{12}{11} \\ y = -\frac{14}{11} \end{cases}$$

Huom: Edellä on käytetty molemmille tuntemattomille yhteenlaskukeinoja. Toinen tapa on sijoituskeino: Ratkaistaan esimerkiksi jälkimmäisestä yhtälöstä x ja sijoitetaan se ensimmäiseen yhtälöön:

$$x = -4 - 4y \Rightarrow 5(-4 - 4y) - 2y = 8 \Rightarrow -20 - 20y - 2y = 8 \Rightarrow -22y = 28 \Leftrightarrow y = -\frac{28}{22} = -\frac{14}{11},$$

$$\text{jolloin } x = -4 - 4y = -4 - 4 \cdot \left(-\frac{14}{11}\right) = -4 + \frac{56}{11} = \frac{-4 \cdot 11 + 56}{11} = \frac{12}{11}$$

3.5. Pullo ja korkki maksavat yhteensä 25 €. Pullo maksaa 20 € enemmän kuin korkki. Paljonko maksaa korkki?

Ratkaisu: Olkoon korkin hinta x , jolloin pullon hinta on $20 + x$. Siis $x + 20 + x = 25$, joten $2x = 5$ eli $x = 2,5$. Siis korkin hinta on 2,5 €.



Huom: Tämä tehtävä on peräisin kuuluisasta Kalle Väisälän Algebran oppi- ja esimerkkikirjasta I. Ainoastaan markat on muutettu euroiksi.

3.6. Antti on 7 vuotta vanhempi kuin Alisa. Kuinka vanha on Alisa, kun kahden vuoden kuluttua Antti on kaksi kertaa, niin vanha kuin Alisa?

Ratkaisu: Olkoon Alisan ikä x , jolloin Antin ikä on $x + 7$. Kahden vuoden kuluttua Alisan ikä on $x + 2$ ja Antin $x + 9$, jolloin saadaan yhtälö $x + 9 = 2(x + 2)$ eli $x + 9 = 2x + 4$. Ratkaisemalla yhtälö saadaan $x = 5$. Siis Alisa on 5 vuotias.

3.7. Kalevi sai mennä isänsä kuorma-autossa sillä ehdolla, että olisi kotona 1,5 tunnin kuluttua. Hän otti polkupyörän mukaansa auton lavalle. Miten pitkän matkan hän sai olla kuorma-autossa, jos auton keskinopeus oli 60 km/h ja polkupyörän 12 km/h?

Ratkaisu: Merkitään Kalevin kuorma-autossa kulkemaa matkaa kirjaimella s . Koska $v = \frac{s}{t}$, niin $t = \frac{s}{v}$. Kuorma-autolla ja polkupyörällä kuljettu aika on $\frac{s}{60} + \frac{s}{12} = 1,5$, missä s :n laatu on km. Nimittäjien pienin yhteinen jaettava eli pyj on 60. Kerrotaan yhtälö luvulla 60, jolloin saadaan $s + 5s = 60 \cdot 1,5 \Leftrightarrow 6s = 60 \cdot 1,5 \Leftrightarrow s = \frac{60 \cdot 1,5}{6} = 15$. Siis vastaus on 15 km.

3.8. Lentokoneen nopeus oli vastatuuleen 300 km/h ja myötätuuleen 400 km/h. Kuinka suuri oli tuulen nopeus?

Ratkaisu: Olkoon lentokoneen nopeus x ja tuulen y . Silloin saadaan yhtälöpari

$$\begin{cases} x + y = 400 \\ x - y = 300 \end{cases}$$

Vähentämällä ylemmästä yhtälöstä alempi saadaan $2y = 100$, jolloin $y = 50$. Siis tuulen nopeus on 50 km/h.

3.9. Millä p :n ja q :n arvoilla yhtälön $t^2 + pt + q = 0$ juuret ovat 30 ja -40?

Ratkaisu: Sijoitetaan luvut 30 ja 40 t :n paikalle, jolloin saadaan yhtälöpari

$$\begin{cases} 30^2 + 30p + q = 0 \\ (-40)^2 - 40p + q = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 900 + 30p + q = 0 \\ 1600 - 40p + q = 0 \end{cases}$$

Vähentämällä ylemmästä yhtälöstä alempi saadaan



$$-700 + 70p = 0 \Leftrightarrow p = 10$$

Sijoittamalla p ensimmäiseen yhtälöön saadaan

$$900 + 30 \cdot 10 + q = 0 \Rightarrow q = -900 - 300 = -1200$$

4. Prosentti

Prosentti on sadasosa ja promille on tuhannesosa.

4.1. Laske

a) Tuotteen hinta on 480 €. Jos ostaja saa 15 % alemuksen, niin mikä on hinta?

Ratkaisu: $\left(1 - \frac{15}{100}\right) \cdot 480 \text{ €} = 0,85 \cdot 480 \text{ €} = 408 \text{ €}$

Huom.1. Yleisesti p % luvusta a on p sadasosaa luvusta a eli $\frac{p}{100} \cdot a$. Yleensä kannattaa

käyttää **prosenttikerrointa**. Esimerkiksi $15\% = 15 \cdot \frac{1}{100} = 0,15$.

b) Montako luku 20 on suurempi kuin luku 10? Montako % prosenttia luku 10 on pienempi kuin luku 20?

Ratkaisu: $100 \cdot \frac{20-10}{10} \% = 100\%$. Siis 20 on 100 % suurempi kuin 10.

$$100 \cdot \frac{20-10}{20} \% = 50\% \text{ . Siis 10 on 50 \% pienempi kuin 20.}$$

Huom: Yleisesti, jos $a > b$, niin $100 \cdot \frac{a-b}{b}$ ilmoittaa kuinka monta prosenttia a on suurempi

kuin b ja $100 \cdot \frac{a-b}{a}$ ilmoittaa kuinka monta prosenttia b on pienempi kuin a.

c) Mikä luku on 20 % suurempi kuin luku 5?

Ratkaisu: Olkoon kysytty luku x. Tällöin $x = 5 + \frac{20}{100} \cdot 5 = 6$. Prosenttikerrointa käyttäen saadaan vastaus helpommin: $x = 1,2 \cdot 5 = 6$.



4.2. Auton matkamittari näyttää 6 prosenttia liikaa. Mikä on mittarin lukemaa 815 km vastaava todellinen matka?

Ratkaisu: Olkoon x todellinen matka. Silloin

$$1,06x = 815 \Rightarrow x = \frac{815}{1,06} = 768,8... \approx 769$$

Siis todellinen matka on noin 769 km.

4.3. Erään tuotteen hinta nousee kahtena peräkkäisenä vuotena 5 % ja 30 %. Paljonko hinta nousee näiden kahden vuoden aikana?

Ratkaisu: Olkoon tuotteen alkuperäinen hinta x €. Kahden vuoden aikana hinta nousee $1,05 \cdot 1,30 \cdot x = 1,365x \approx 1,37x$. Hintaa nousee noin 37 %.

Huom: Helposti ajatellaan, että hinta nousee 35 %. **Mikä on väärin!**

4.4. Oletetaan, että huoneen lämpötilan pienentäminen yhdellä asteella laskee lämmityskustannuksia 5 %. Kuinka paljon kuuden asteen laskeminen alentaa näitä kustannuksia?

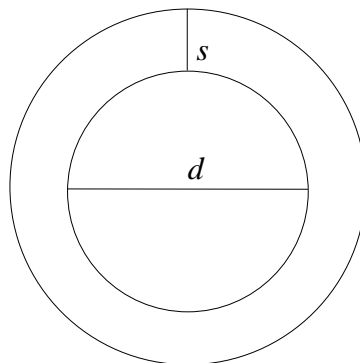
Ratkaisu: Olkoon lämmityskustannukset ennen lämpötilan alentamista H . Yhden asteen lämpötilan laskun jälkeen kustannukset ovat $0,95H$ ja kuuden asteen alentamisen jälkeen

$$0,95^6 H = 0,735...H \approx 0,74H$$

Kustannukset alenevat $(100 - 74) \% = 26 \%$.

5. Geometria ja trigonometria

5.1. Kuinka monta kuutiometriä lunta on poistettava, kun halutaan tehdä ympyrärenkaan muotoinen luistelualue järven jäälle? Ympyrärenkaan sisähalkaisija d on 750 metriä ja leveys s on 15 metriä. Oletetaan, että meren jää on tasainen ja sitä peittää koko alueella 0,50 metrin korkuinen lumikerros.





Ratkaisu: Ympyränsäntään pinta-ala on

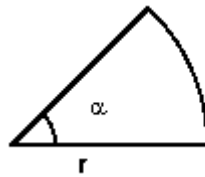
$$A = \frac{\pi(d + 2s)^2}{4} - \frac{\pi d^2}{4} = 3,605 \dots 10^4 \text{ m}^2,$$

jolloin lumen määrä $V = Ah$, missä $h = 0,50$ m. Siis

$$V = 1,802 \dots 10^4 \text{ m}^3 \approx 1,8 \cdot 10^4 \text{ m}^3$$

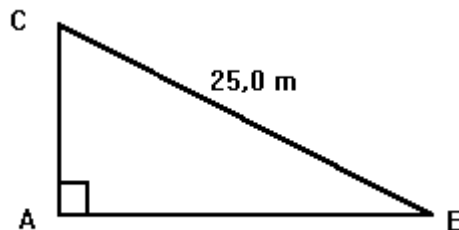
Huom: Ympyrän pinta-ala saadaan kaavoilla $A = \frac{\pi d^2}{4} = \pi r^2$, missä d on ympyrän halkaisija ja r on ympyrän säde. Suoran ympyrälieriön tai sylinterin tilavuus $V = Ah$, missä A on pohjan pinta-ala ja h on korkeus.

5.2. Kuinka suuri on kulman α oltava, jotta ympyräsektorin ala olisi $19,5 \text{ cm}^2$? Säde $r = 10,0$ cm.



Ratkaisu: $A = \frac{\alpha}{360^\circ} \cdot \pi r^2 \Rightarrow \alpha = \frac{A \cdot 360^\circ}{\pi r^2} = \frac{19,5 \cdot 360^\circ}{\pi \cdot 10,0^2} = 22,36^\circ \approx 22,4^\circ.$

5.3. Laske oheisen suorakulmaisen kolmion ala, jos kateettien AC ja AB suhde = 1:2. Hypotenuusa BC = 25,0 m.



Ratkaisu: Olkoon x on kateetin AC pituus, jolloin kateetin AB pituus on $2x$. Pythagoraan lauseen nojalla on $x^2 + (2x)^2 = 25^2 \Leftrightarrow x^2 + 4x^2 = 625 \Leftrightarrow 5x^2 = 625 \Leftrightarrow x^2 = 125.$

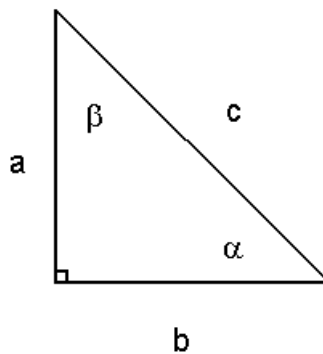


Siis $x = \sqrt{125} = 11,180\dots$. Tällöin kateetin AB pituus $2x = 2\sqrt{125} = 22,306\dots$, jolloin pinta-ala on $A = \frac{1}{2} \cdot 2x \cdot x = x^2 = (\sqrt{125})^2 = 125$. Siis vastaukseksi saadaan 125 m^2 .

Huom1: Yleensä kannattaa menetellä, niin että yksikköjä eli edellisen esimerkin tapauksessa metriä m ei laiteta laskuun. Toisaalta yksikköjen käyttö laskuissa on siinä mielessä järkevää, että vastauksesta nähdään **oikea yksikkö**.

Huom2: Suorakulmaisessa kolmiossa on voimassa Pythagoraan lause: $c^2 = a^2 + b^2$.

Edelleen trigonometriset funktiot (teräville kulmille) määritellään seuraavasti:



$$\sin \alpha = \frac{a}{c}, \quad \cos \alpha = \frac{b}{c}, \quad \tan \alpha = \frac{a}{b}, \quad \cot \alpha = \frac{b}{a}$$

Siis kulman ollessa välillä $0^\circ \leq \alpha \leq 90^\circ$ huomataan, että esimerkiksi

$$0 \leq \sin \alpha \leq 1 \quad \text{ja} \quad 0 \leq \cos \alpha \leq 1.$$

Trigonometrisia funktioita käyttäen edellinen esimerkki voidaan laskea toisin:

$$\tan \alpha = \frac{1}{2} \Rightarrow \alpha = 26,565\dots^\circ$$

Koska $\alpha + \beta = 90^\circ$, niin $\beta = 90^\circ - \alpha = 63,434\dots^\circ$. Jälkimmäisen kulman arvoa ei itse asiassa tarvita:

$$\frac{a}{c} = \sin \alpha \Rightarrow a = c \cdot \sin \alpha$$
$$\frac{b}{c} = \cos \alpha \Rightarrow b = c \cdot \cos \alpha$$

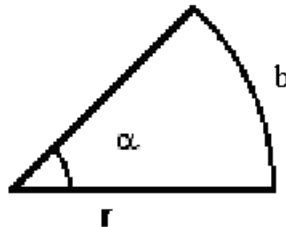


Kolmion pinta-ala on

$$A = \frac{1}{2}ab = \frac{1}{2}c^2 \sin \alpha \cos \alpha = 125$$

Saadaan sama vastaus: Pinta-ala on 125 m^2 .

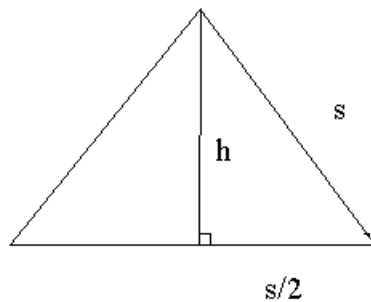
Huom3: Merkintä $\sin \alpha$ tarkoittaa $\sin(\alpha)$. Samoin tulo ab tarkoittaa sitä, että lukujen a ja b kertolasku on suoritettu: $ab = a \cdot b$. Erityisesti esimerkiksi $\sin 2\alpha \neq \sin 2 \cdot \alpha$. Erityisesti laskimen kanssa pitää olla tarkkana mm. kulmayksikköjen suhteen. Ellei mitään yksikköä ole mainittu, niin silloin tarkoitetaan absoluuttista kulmayksikköä eli radiaania. Absoluuttinen kulmayksikkö on laaduton luku:



Absoluuttisissa kulmayksiköissä kulma α määritellään siten, että piirretään r – säteinen ympyrän kaari, jolloin $\alpha = \frac{b}{r}$. Käsite on ”hyvin määritelty”, sillä kaikki ympyrän sektorit, joille kulma α on vakio ovat yhdenmuotoiset. Jos α on täysi kulma eli asteissa seksagesimaalijärjestelmän mukaan 360 astetta, niin radiaaneissa 360 astetta on $\frac{2\pi r}{r} = 2\pi$ (rad).

5.4. Tasasivuisen kolmion piirin pituus on 18 cm. Laske sen korkeus.

Ratkaisu: Tasasivuisessa kolmiossa kaikki sivut ovat yhtäsuuria, jolloin myös kaikki kulmat ovat yhtäsuuria eli 60 astetta. Merkitään sivun pituutta kirjaimella s , jolloin $3s = 18$ eli $s = 6$. Kolmion huippupisteestä piirretty korkeusjana puolittaa kantasivun



Pythagoraan lauseen perusteella $h = \sqrt{s^2 - \left(\frac{s}{2}\right)^2} = \sqrt{s^2 - \frac{s^2}{4}} = \sqrt{\frac{4s^2 - s^2}{4}} = \sqrt{\frac{3s^2}{4}} = \frac{s\sqrt{3}}{2}$

Tämän perusteella

$$h = \frac{s\sqrt{3}}{2} = \frac{6\sqrt{3}}{2} = 3\sqrt{3} = 5,19615... \approx 5,2$$

Siis korkeus on 5,2 cm.

Huom: Lisää tietoa mm. kolmioista löytyy sivulta: <http://fi.wikipedia.org/wiki/Kolmio>

5.5. Erään järven pinta-ala on 1500 neliökilometriä. Kuinka suuri se on kartalla, jonka mittakaava on 1:200 000? Anna vastaus kolmen numeron tarkkuudella neliösenttimetreinä.

Ratkaisu: Yhdenmuotoisissa kuvioissa vastinjanat ovat verrannolliset. Jos mittakaava on k, niin vastinjanojen suhde = k ja vastinpinta – alojen suhde on mittakaavan neliö. Olkoon järvenpinta-ala A luonnossa ja K kartalla. Merkitään mittakaavaa kirjaimella k. Tällöin

$$\frac{A}{K} = k^2 \Rightarrow K = \frac{A}{200000^2} = 3,75 \cdot 10^{-8} \text{ km}^2 = 3,75 \text{ cm}^2$$

5.6. Pyramidin vaippa muodostuu neljästä tasasivuisesta kolmiosta. Laske pyramidin tilavuus, kun kolmion sivut ovat 50,0 cm.

Ratkaisu: Olkoon särmän pituus a. Tällöin pohjan pinta-ala on $A = a^2$ ja pohjaneliön lävistäjä $d = a\sqrt{2}$. Edelleen pyramidin korkeus $h = \sqrt{a^2 - (d/2)^2} = \sqrt{a^2 - a^2/2} = \frac{a}{\sqrt{2}}$

Pyramidin tilavuus on

$$V = \frac{1}{3} Ah = \frac{1}{3} a^2 \frac{a}{\sqrt{2}} = \frac{a^3}{3\sqrt{2}} = 29462,7 \text{ cm}^3 \dots \approx 29500 \text{ cm}^3 = 29,500 \text{ dm}^3 \dots$$



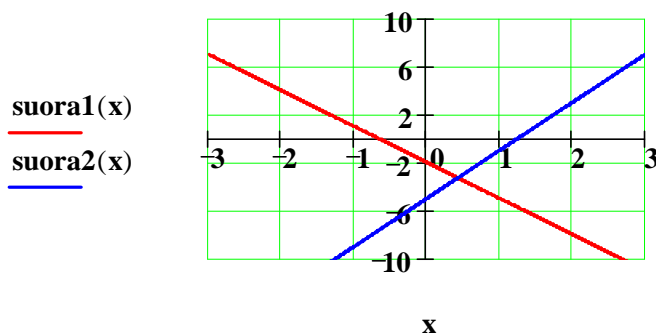
Vastaus : Tilavuus on noin 29,5 kuutiodesimetriä.

6. Analyttinen tasogeometria

6.1. Laske suorien $3x + y = -2$ ja $4x - y = 5$ leikkauspisteen koordinaattien tarkat arvot. Piirrä myös molempien suorien kuvaaja xy-koordinaatistoon.

$$\text{Ratkaisu: } \begin{cases} 3x + y = -2 \\ 4x - y = 5 \end{cases} + \Leftrightarrow \begin{cases} 7x = 3 \\ y = -2 - 3x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{3}{7} \\ y = -2 - \frac{9}{7} = -\frac{23}{7} \end{cases}$$

Kuvaajat: Ensimmäinen yhtälö voidaan saattaa muotoon $y = -3x - 2$ ja toinen $y = 4x - 5$:



Huom1: Edellisessä kuvassa $\text{suora1}(x) = -3x - 2$ ja $\text{suora2}(x) = 4x - 5$. Kuvaaja on piirretty ohjelmistolla MathCad, mutta suorien kuvaajat pitää **osata piirtää "käsin"**. Ao.linkissä on joitakin esimerkkejä, jotka on tehty em. ohjelmistolla:

<http://www.cc.puv.fi/~hn/MATHCAD/Mcad.html>

Huom2: Jos suora on annettu muodossa $y = kx + b$, niin k on suoran kulmakerroin ja suora leikkaa y - akselin pisteessä $(0,b)$.

Huom3: Jos suora kulkee xy -tasossa pisteiden (x_1, y_1) ja (x_2, y_2) kautta, niin suoran yhtälö saadaan aina muotoon



$$y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1), \text{ mikäli } x_1 \neq x_2.$$

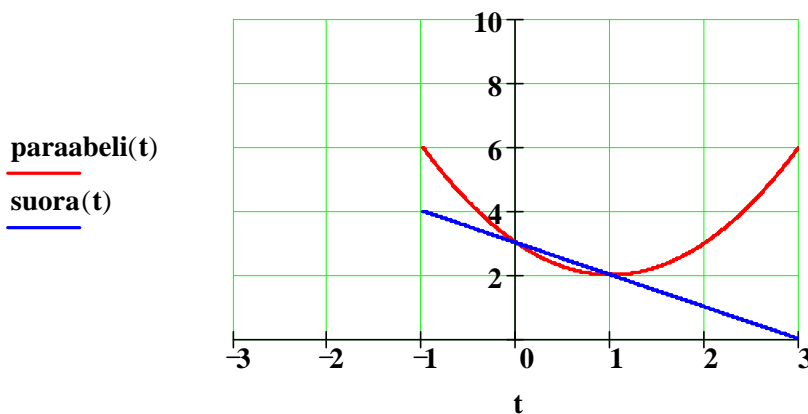
6.2. Määritä paraabelin $y = y(t) = t^2 - 2t + 3$ ja suoran $t + y - 3 = 0$ leikkauspisteiden koordinaattien tarkat arvot. Piirrä myös kuvaajat.

Ratkaisu: Ratkaistaan suoran yhtälöstä y t :n avulla ja sijoitetaan se paraabelin yhtälöön. Koska $y = -t + 3$, niin

$$-t + 3 = t^2 - 2t + 3 \Leftrightarrow t^2 - t = 0 \Leftrightarrow t(t - 1) = 0 \Leftrightarrow t = 0 \vee t = 1$$

Siis $t_1 = 0$ ja $t_2 = 1$. Sijoittamalla nämä suoran yhtälöön saadaan $y_1 = 3$ ja $y_2 = 2$. Leikkauspisteet ovat $(0,3)$ ja $(1,2)$.

Kuvaajat:



Huom: Paraabelin $y = y(t) = t^2 - 2t + 3$ huippu saadaan esim. neliöksi täydentämällä:

$$y = y(t) = t^2 - 2t + 3 = (t - 1)^2 + 2 \Leftrightarrow y - 2 = (t - 1)^2$$

Tästä nähdään, että huipun koordinaatit ovat $(1,2)$. Lisäksi paraabelin akseli on pystyakselin suuntainen ja paraabeli aukeaa ylöspäin. Yleisesti paraabelin $y = ax^2 + bx + c$ akseli on pystyakselin suuntainen. Huippu saadaan neliöksi täydentämällä. Jos $a > 0$, niin paraabeli aukeaa ylöspäin. Jos $a < 0$, niin suunta on alaspäin.

6.3. Määritellään funktion

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{kun } 0 < x < 1 \\ 0 & \text{muulloin} \end{cases}$$



avulla funktio

$$g(x) = f(2x - 1)$$

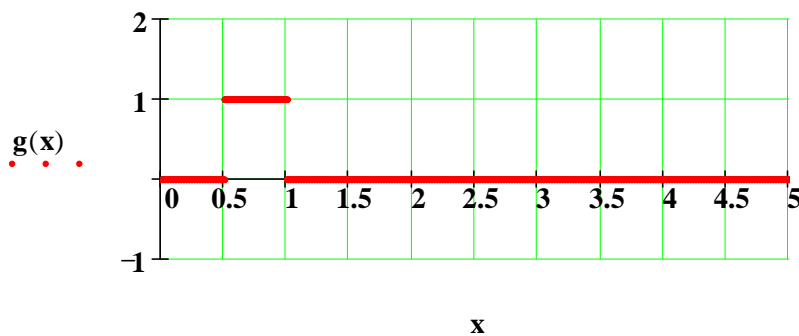
Laske $g(1)$ ja $g(0,5 + 10^{-1000})$. Piirrä lisäksi funktion $g(x)$ kuvaaja välillä $0 \leq x \leq 5$.

Ratkaisu: Funktio $g(x)$ saa arvon 1 tarkalleen silloin kun on voimassa:

$$0 < 2x - 1 < 1 \Leftrightarrow \frac{1}{2} < x < 1.$$

Muulloin arvo on 0. Siis $g(1) = 0$ ja $g(0,5 + 10^{-1000}) = 1$.

Kuvaaja:



7. Looginen päättely

7.1.

a) Määritä lukujonon puuttuvat luvut: **1, 2, 3, 5, 8, 13, ?1, ?2**

b) Mikä on lukujonon **1, 2, 4, 8,...** kymmenes jäsen?

c) Oletetaan, että lukujonossa kahden perättäisen jäsenen erotus on d . Mikä on jonon **1, 1+d, 1 + 2d,...** sadas jäsen?

Ratkaisu: a) Jonossa jäsen on kahden edellisen jäsenen summa. Siis $?1 = 8 + 13 = 21$ ja $?2 = 13 + 21 = 34$.

Huom: Kyseessä on Fibonaccin lukujono. Aiheesta lisää löytyy mm. ao.linkistä:

http://fi.wikipedia.org/wiki/Fibonaccin_lukujono



b) Ensimmäinen jäsen on 2^0 , toinen 2^1 jne. Siis kymmenes jäsen on $2^9 = 512$.

Huom:Kannattaa tutkia ao. linkkiä:

<http://fi.wikipedia.org/wiki/Lukujono>

c) Sadas jäsen on $1+99d$.

7.2. Ratkaise Sudoku

	5	1				7		
			6	9				2
9					2			3
		2	9		8		7	
	4			6			2	
	7		5		4	1		
4			1					6
3				7	5			
		5				4	9	

Huom1: Sudoku:

Tarkoituksena on täyttää ruudut numeroilla 1-9 niin että jokaisella pysty- ja vaakarivillä esiintyy kukin numero kerran. Lisäksi jokaisessa 3x3-taulokoissa täytyy olla numerot 1-9 kerran.

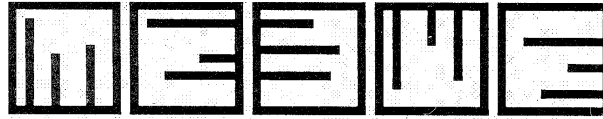
Huom2: Sudoku-peleihin ja muihin vastaaviin löytyy ohjeita Internetistä:

<http://fi.wikipedia.org/wiki/Sudoku#Historiaa>

<http://www.akuankka.fi/tekemista/touhola/sudoku/>



7.3 Mikä alla olevista kuvioista ei kuulu joukkoon?



A

B

C

D

E

Ratkaisu: C ei kuulu joukkoon. Miksi?

Huom: Erilaisia testejä löytyy mm. Mensan sivuilta.